# Développement : dual de $M_n(\mathbb{K})$

. FGN, oraux X-ENS, algèbre 1 [p305]

**Thm** : 1) Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. On note $f_A : \begin{cases} M_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K} \\ X \longmapsto Tr(AX) \end{cases}$ (forme linéaire)

Alors $\tilde{f} : \begin{cases} M_n(\mathbb{K}) \longrightarrow M_n(\mathbb{K})^* \\ A \longmapsto f_A \end{cases}$ établit un isomorphisme entre $M_n(\mathbb{K})$ et son dual.

2) Soit $f : M_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ forme linéaire telle que pour tout $(X,Y) \in M_n(\mathbb{K})^2$, $f(XY) = f(YX)$.
Il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que pour tout $X \in M_n(\mathbb{K})$, $f(X) = \lambda\, Tr(X)$

**Preuve** : On rappelle que pour $(E_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ la base canonique de $M_n(\mathbb{K})$.
On a pour tout $1 \leq i, j, k, l \leq n$ $\quad E_{ij} E_{kl} = \delta_{jk} E_{il}$

① On vérifie facilement que $\tilde{f}$ est linéaire.
Pour des raisons de dimension, il suffit donc de prouver qu'elle est injective.
Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ telle que $f_A = 0$
On a donc pour $1 \leq i_0, j_0 \leq n$

$$0 = Tr(A E_{i_0 j_0}) = Tr\Big(\sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{ij} E_{ij} E_{i_0 j_0}\Big)$$
$$= Tr\Big(\sum_{i=1}^{n} a_{i i_0} E_{i i_0} E_{i_0 j_0}\Big)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} a_{i i_0} Tr(E_{i j_0}) = a_{j_0 i_0}$$

Donc $A$ est nulle.

② Deux méthodes

-> Si $1 \leq i, j \leq n$ et $i \neq j$, on obtient
$$f(E_{ij}) = f(E_{ii} E_{ij}) = f(E_{ij} E_{ii}) = f(0) = 0$$
On a également $f(E_{ii}) = f(E_{ij} E_{ji}) = f(E_{ji} E_{ij}) = f(E_{jj})$
Si on note $\lambda$ la valeur commune des $f(E_{ii})$, on remarque que les formes linéaires $f$ et $\lambda\, Tr$ coïncident sur la base canonique de $M_n(\mathbb{K})$. Elles sont donc égales.

-> On utilise le premier point :
Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ telle que $f = f_A$. On a, pour tout $(X,Y) \in M_n(\mathbb{K})^2$,

$$\underset{f_A(XY)}{\underset{\parallel}{Tr(AXY)}} = \underset{f_A(YX)}{\underset{\parallel}{Tr(AYX)}}$$

Comme $Tr(AYX) = Tr(XAY)$, on en déduit que
$$Tr((AX - XA)Y) = 0.$$

Ceci étant valable pour toute matrice $Y$, on a d'après ①, $AX = XA$.
Ainsi $A$ commute avec toute matrice $X$, il s'agit donc d'une homothétie.
En effet si $A = (a_{ij})_{1\le i,j\le n}$, on a pour $1 \le j, i \le n$

$$AE_{ij} = \sum_{1\le k,l\le n} a_{kl} E_{kl} E_{ij} \underset{l=i}{=} \sum_{k=1}^{n} a_{ki} E_{kj},$$

$$= E_{ij}A = \sum_{1\le k,l\le n} a_{kl} E_{ij} E_{kl} \underset{j=k}{=} \sum_{l=1}^{n} a_{jl} E_{il}$$

Par unicité de l'écriture, on obtient $a_{ki} = 0$ pour $k \neq i$ et $a_{ii} = a_{jj}$ : $A$ est une matrice scalaire.

On retrouve ainsi que $f = f_A$ est colinéaire à la trace. □

<u>Application</u> : Tout hyperplan de $M_n(\mathbb{K})$ coupe $GL_n(\mathbb{K})$ $(n \geq 2)$

Preuve : Soit $H$ un hyperplan de $M_n(\mathbb{K})$. C'est donc le noyau d'une forme linéaire non nulle $f$. D'après le th$_n$, il existe $A \in M_n(\mathbb{K})$ non nulle tq pour tout $X \in M_n(\mathbb{K})$, $f(X) = Tr(AX)$.

→ Il s'agit de montrer qu'il existe $X$ inversible telle que $AX$ soit de trace nulle. Notons $r \geq 1$ le rang de $A$.
Il existe $P$ et $Q$ dans $GL_n(\mathbb{K})$ telles que $PAQ = J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Alors, si $X \in M_n(\mathbb{K})$, $Tr(AX) = Tr(P J_r Q X)$
$= Tr(J_r Q X P)$

Il nous suffit donc de trouver une matrice inversible telle que $Tr(J_r Y) = 0$ (on posera $X = Q^{-1} Y P^{-1}$ qui sera dans $GL_n(\mathbb{K})$ et dans $H$).

La matrice de permutation $Y = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & \ddots & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & 1 & 0 \end{pmatrix}$ convient car $J_r Y$ a sa diagonale nulle.

□